行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

附加年金制破產風險極小化及最適提撥率之探討

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2416-H-004-033-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：國立政治大學風險管理與保險學系

計畫主持人：黃泓智

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 11 月 1 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

附加年金制破產風險極小化及最適提撥率之探討

計畫主持人：黃泓智

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC 91－2416－H－004－033－

執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

成果報告類型：精簡報告

處理方式：研究計畫可公開查詢

執行單位：國立政治大學風險管理與保險學系

中　華　民　國 92 年 10 月 31 日

附加年金制破產風險極小化及最適提撥率之探討風險

摘要

一般文獻對退休金計劃提撥率的研究，通常沒有考慮市場上短期利率所提供的訊息，例如一年期債券，本研究利用一年期債券每年的投資報酬率若為非獨立的情況時，在調整退休金提撥率時，可以考慮一年期債券所提供的市場訊息來降低退休基金破產風險和提撥率變動過大的風險。在本研究中，我們針對附加年金制，提供一有效的模型用來決定提撥率，同時利用市場上短期利率的訊息，以預估退休金的投資收益，並達到對退休金計劃中風險的控制。另外，為了增進此研究結果能更符合實際市場中運作的需求，本文利用隨機模擬的方法，採用較符合實際的投資模型、提撥模型及精算假設等因素，對退休金計劃的穩定性做更進一步的探討。

關鍵詞：隨機模型，退休金計劃，最適提撥率，附加年金

Abstract

The traditional approach of pension plan contribution rate does not make allowance for current market interest rates: for example, on one-year bonds where rates-of-return on fund assets are not independent from one year to the next. We consider how to make use of market information on interest rates to reduce volatility in contribution rates and funding levels. In this research we aim to propose a more general model for the adjustment of the contribution rate and focus our study on the factors when making use of market information to reduce contribution rate volatility. Furthermore, We consider more realistic assumptions (for example, stochastic salary growth) and more realistic investment models (for example, the Wilkie Model) in a pension scheme and investigate, by means of stochastic simulation, the control of the contribution rate for improving the stability of the pension scheme.

keywords : stochastic, pension plan, contribution rate, wilkie model, supplementary annuity.

1. 前言及研究目的

隨著人類之平均壽命的延長，人口老化所衍生出來的社會問題亦隨之受到重視，有鑒於現制之退休金有將近百分之六十幾的勞工領不到退休金，政府近幾年來致力於勞工退休制度改制議題的探討，在九十年八月二十五日經濟發展諮詢委員會獲致「採行可攜式之個人帳戶制，附加年金制及其他可攜式年金制三制併行，供勞工自由選擇適用」之決議，附加年金制之精神與確定給付制類似，其年金領取之額度與工作之年資和薪資有關，但在給付的內容及風險的承擔對象稍有不同，對於此類型退休金，精算師應針對退休金之資產和負債每年或每三年評估一次，對於確定給付制，退休金提撥不足的風險完全是由雇主來承擔，而對於附加年金制，若精算評估的結果發現基金提撥不足，則應調整費率或給付標準，調整費用超過投保每月工資 6%部份，由被保險人負擔，所以其基金不足的風險則是由員工來承擔。

然而在新制所堅持的政府不補助保費，不協助管理基金，基金管理由勞資自行管理自行負責的情況下，若干年後的基金是否有能力支付退休金，實為一重大的挑戰，由於退休金之提撥是否足夠，嚴重影響到員工的老年給付，因此如何找尋一個最適當的提撥率，是一個相當重要的課題，本研究將針對附加年金制等確定給付型態的退休金，研究其最佳之提撥率，降低其因提撥不足而破產的風險和提撥率振盪過大的風險，通常基金的破產風險和提撥率的變異風險具有反向的效果，例如盈餘或虧損的攤提期間若是很小，表示精算評估的結果發現有過多的盈餘或虧損時則立即處理其缺口，對於資產不足或過多的風險可立即降低，然而如此卻提高了提撥率振盪過大的風險，因此，如何控制各種因素，求得最佳提撥率，同時降低提撥不足或過多的風險，對於退休金而言，可說是最重要之議題。

2. 文獻回顧

回顧對於最適退休金提撥率之研究，一般而言，控制退休金計劃風險的因素包括：提撥公式的選定、盈餘或虧損的攤提期間的選定、資產及負債評估的頻率及精算假設的選定等因素。有關於提撥模型之研究，大致上可分為兩類，第一類是 The Spread Method，此方法大致上流行於英國等國家，Dwadally 和 Haberman(1997)曾針對其盈餘或虧損的調整部份進行研究，以期降低退休基金破產風險和提撥率變動過大風險，第二類是 The Amortization of Loses Method，此方法大致上流行於美加等地區，Duffrense (1989b)對未提撥負債(Unfounded Liability)和損失(Losses)之間的關係曾作深入的探討，Bowers、Hickman 和 Nesbitt(1979)亦曾針對各種不同的提撥模型的假設進行研究，探討不同的提撥模型和退休基金破產風險和提撥率變動過大風險之間的關係。

有關於盈餘或虧損的攤提期間的研究，Duffrense (1988,1989)曾提出其攤

提期間和退休基金破產風險和提撥率變動過大風險之關係的研究。Haberman (1994,1997)亦曾在投資收益為 AR 和 MA 之下，探討攤提期間影響退休基金破產風險和提撥率變動過大風險的研究。Cairns (1994)用模擬的方法探討在 The Spread Method 和 The Amortization of Loses Method 之下，盈餘或虧損的攤提期間對退休基金破產風險和提撥率變動過大風險的影響。

關於精算假設的因素的探討，Bacinello (1988)考慮死亡率為一隨機變數，使用隨機模擬的方法求得最佳提撥率，並計算此提撥率是否足夠支付負債的機率。Mandl 和 Mazurova (1996)亦做過類似的探討，Bowers、Hickman 和 Nesbitt 將人口統計的變數和總經變數同時視為動態的變數建構模型進行探討，O’Brien (1986,1987)、Dyson 和 Exley (1995)、Wright (1997)和 Shapiro (1990)亦曾針對不同的精算假設，探討其對退休金穩定性的影響。

Cairns (1994)和 Haberman(1993a)亦曾研究資產及負債的評估的頻率對退休基金破產風險和提撥率變動過大風險的影響，通常對於精算出的盈餘或虧損，理論上應是當年度進行攤提，其效果最好。但基於實務上操作的困難，盈餘或虧損的攤提常有延遲的情形。Balzer、Benjamin(1980)、Haberman(1992)、Zimbidis 和 Haberman(1993)曾討論對於盈餘或虧損延遲攤提對於退休金穩定度的影響。

3. 研究方法

3.1 模型建立

對於確定給付等類型之退休金制度(DB)的研究，大多數學者針對某些重要的因素建構模型，在特定的精算假設下，對於其欲探討的目標函數作數理的推導，得到推導完成的公式後，便可針對公式內之變數作敏感度分析，探討其與目標函數之關係，進而達到藉由變數的控制，達到目標函數最佳化的目的，此類的研究在 DB 的文獻中以 Duffrense (1988,1989)，Haberman (1992,1993,1994,1997,1999)，Cairns (1994,1997)最具代表性，但是，由於這類研究在理論上數學推導的困難度頗高，因此許多學者通常對於特定的精算假設必須加以簡化以利推導，其中 Duffrense (1988,1989)和 Cairns (1994,1997) 假設退休金之整體收益為 *iid*， Haberman (1992,1993,1994,1997,1999)進一步假設退休金之整體投資收益為 AR 和 MA model，這些簡化中之精算假設和實務上有些許的差距，因此其理論上的貢獻對於實務上的操作及應用因而受到了較大的限制。

本文針對退休金計劃中之附加年金制，建構適合其特性之資產及負債的模型，採用較符合市場投資收益的經濟模型 (如 Wilkie Model)，並使用較符合退休金實際操作上的投資組合 (例如：短期債券、長期債券、股票等)；在人口假設方面，本文之退休金成員係以台灣公務人員保險為目標，本文首先針對目標團體描繪出其人員年齡之分配，計算出各年齡所佔之比例，在固定比例情形下再以台灣第四回生命表加入死亡因素，也就是在退休金累積期，成員有可能因為死亡

而退出退休金計畫，而由於死亡所退出計畫之成員，我們假設新進之成員與死亡之成員年齡相同，以維持分配之一致性。再者，本文中雖加入死亡率之因素，為了簡化模型，本文忽略提早退休的因素，另外本文亦不考慮退休金以外之給付，如死亡給付與傷殘給付等。最後，給付之方式為一次給付，不考慮月退等其他情形。

傳統的退休金提撥模型中通常包含了二個控制因素，第一部分是 Normal cost，此一部份可根據各種不同的提撥方法(Funding Method)求得，另一部份是對於盈餘和虧損的調整項 ADJ(t)，此部份是根據退休金之資產和負債的評估結果做調整，進而使退休金資產之成長能更符合達到負債之目標，此部份乃是學者們控制退休金穩定度之研究主題，在本文中建構了第三個控制退休金計劃風險的因素，亦即利用市場上所提供之總體經濟的訊息，應用於退休金提撥模型中，推估整體退休基金之投資收益，進而求得退休金提撥率之最佳修正值。依照上述假設，我們定義下列符號:

$AL(t)$ 為時間 t 時之應計負債

$B(t)$ 為時間 t 時之所償付之給付

$NC(t)$ 為時間 t 時之正常成本

則應計負債、給付與正常成本之關係為：

$$AL(t+1)=(1+i)(AL(t)+NC(t)-B(t))$$

其中考慮 i 為負債之精算評價利率，s 為平均薪資成長率，則

$$AL(t+1)=\frac{1+i}{1+s}(AL(t)+NC(t)-B(t))$$

若令 $i_v=\frac{1+i}{1+s}-1$，則

$$AL(t+1)=(1+i_v)(AL(t)+NC(t)-B(t))$$

模擬期初值的設定：

$$AL(0)=\sum_{x=20}^{60} N_x \times {}_{60-x}p_x \times \left(\frac{1+e_v}{1+i_v}\right)^{60-x} \frac{x-20}{60} s(0,x)\ddot{a}_{60}$$

$$B(0)=\frac{2}{3}\times \ddot{a}_{60}\times\left(\frac{1+e_v}{1+i_v}\right)^{40}$$

$$NC(0)=B(0)+AL(0)\left(\frac{1+e_v}{1+i_v}-1\right)$$

其中 e_v 為薪資成長率的估計值，i_v 為精算評價利率，$s(t,x)$ 為 x 歲時 t 時之薪資，N_x 為成員中 x 歲之人數，${}_{60-x}p_x$ 為台灣第四回生命表中 x 歲人會活到 60 歲之

生存率，$\ddot{a}_{60}$ 為 60 歲之年金折現值。

若我們將應計負債、給付與正常成本以薪資成長率調整，則

$$AL(t) = AL(t-1)\frac{W(t)}{W(t-1)}$$

$$NC(t) = NC(t-1)\frac{W(t)}{W(t-1)}$$

$$B(t) = B(t-1)\frac{W(t)}{W(t-1)}$$

另外退休基金、提撥金額和退休給付之關係可表示如下：

$$F(t) = (1+i(t))(F(t-1)+C(t-1)-B(t))$$

其中 $i(t)$ 為我們由 Wilkie 模型所得之綜合投資報酬率，我們另外假設 p_1 為投資在股票市場之比例、 p_2 為投資在長期利率之比例、 $(1-p_1-p_2)$ 為投資在短期利率之比例。

由於基金水準大小和提撥率均隨著薪資指數成長而變大, 所以我們若單純把注意力放在基金和提撥率的絕對數字上是不適當的, 所以我們觀察兩者的穩定性時必須考慮到薪資指數的影響, 所以接下來的部分中, 在最佳化的過程中我們期望最小化的是 $Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$ 與 $Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$，而非 $Var[F(t)]$ 與 $Var[C(t)]$，則我們原先的基金大小方程式即變為

$$\frac{F(t)}{W(t)} = \left((1+i(t))\frac{W(t-1)}{W(t)}\right)\left(\frac{F(t-1)}{W(t-1)}+\frac{C(t-1)}{W(t-1)}-\frac{B(t-1)}{W(t-1)}\right)$$

$$= (1+\tilde{i}(t))(\tilde{F}(t-1)+\tilde{C}(t-1)-\tilde{B}(t-1))$$

其中

$$\tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{W(t)}$$

$$1+\tilde{i}(t) = (1+i(t))\frac{W(t-1)}{W(t)}$$

$$\tilde{B}(t) = \frac{B(t-1)}{W(t)}$$

3.2 提撥率模型建立

本節我們將在提撥率模型中採用各種不同的市場資訊，尋求能在最佳化 $Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$ 與 $Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$ 時提供最有效資訊的提撥率模型。舉例而言，我們將考慮以下不同的提撥率模型，$\tilde{C}(t)$，如：

$$\tilde{C}(t) = NC(t) + k_1(AL(t) - F(t)) + k_2(e^{E_1} - e^{y(t)-E[I(t+1)|F_t]})$$

$$\tilde{C}(t) = NC(t) + k_1(AL(t) - F(t)) + k_2(e^{E_2} - e^{y(t)-J(t)]})$$

$$\tilde{C}(t) = NC(t) + k_1(AL(t) - F(t)) + k_2(e^{E_3} - e^{y(t)})$$

$$\tilde{C}(t) = NC(t) + k_1(AL(t) - F(t)) + k_2(e^{E_4} - e^{I(t)})$$

$$\tilde{C}(t) = NC(t) + k_1(AL(t) - F(t)) + k_2(e^{E_5} - e^{J(t)})$$

且

$$e^{E_1} = E[e^{y(t)-E[I(t+1)|F_t]}]$$
$$e^{E_2} = E[e^{y(t)-J(t)}]$$
$$e^{E_3} = E[e^{y(t)}]$$
$$e^{E_4} = E[e^{I(t)}]$$
$$e^{E_5} = E[e^{J(t)}]$$

$I(t)$ 與 $J(t)$ 分別是從 $t-1$ 到 t 之通貨膨脹率與薪資通貨膨脹率, y(t) 是從 $t-1$ 到 t 之無風險利率。

5. 模擬結果與比較

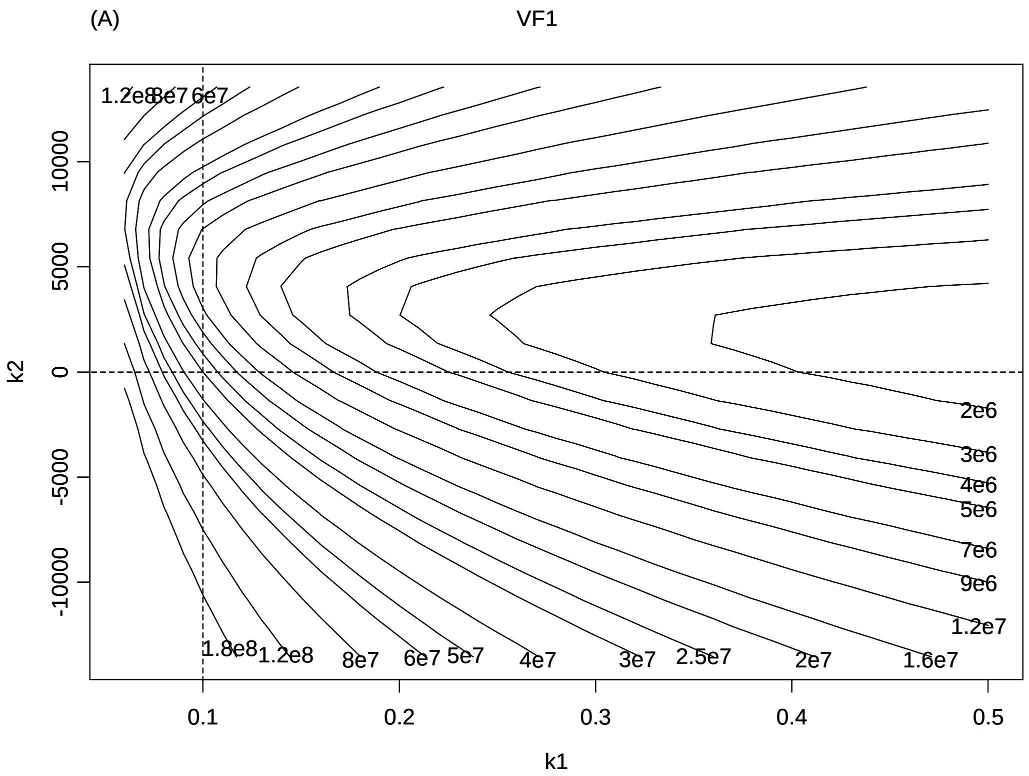
首先我們先考慮以下的提撥率模型：

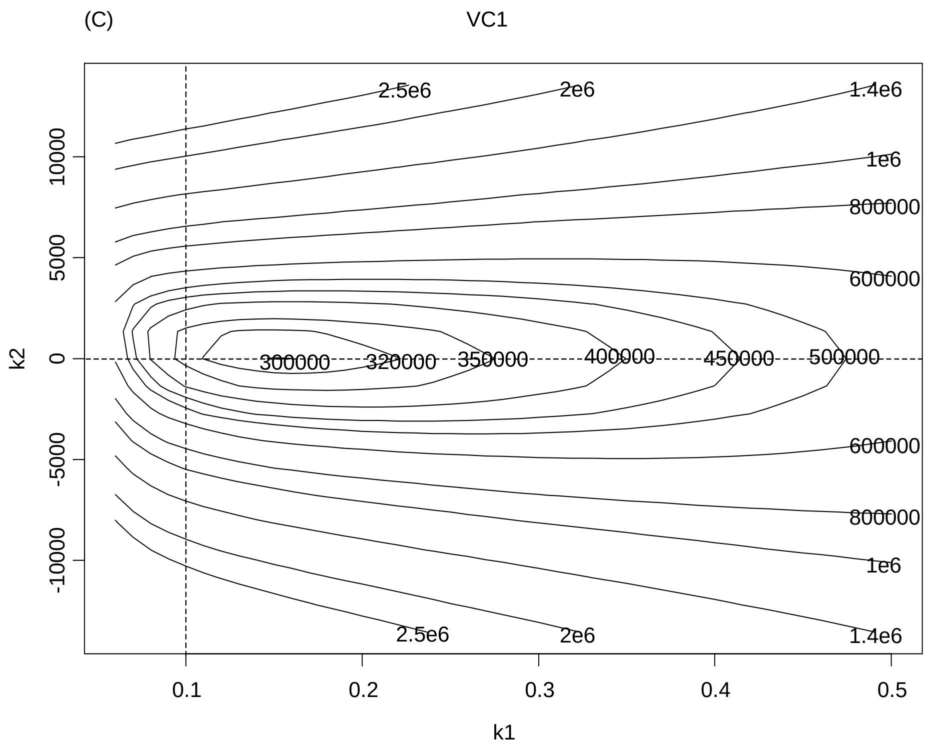
$$\tilde{C}(t) = NC(t) + k_1(AL(t) - F(t)) + k_2(e^{E_1} - e^{y(t)-E[I(t+1)|F_t]})$$

該模型考慮無風險利率扣除通貨膨脹的部分, 亦即以實質之無風險投資報酬率做為市場因素之調整項。

圖(A)中我們畫出 $Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$ 在不同 k_1 與 k_2 下之等值曲線圖，以 $Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$ 而言, 我們發現在提撥率模型中以實質之無風險投資報酬率做為資訊可以明顯的減少其變異，舉例而言，當 k_1=0.1，我們可以降低 $Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$ 約 50%（從三千萬

到一千五百萬)，然而對於$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$而言只能有些微的下降，甚至是沒有影響(圖(C))。





圖(A)與(C)：藉由以實質無風險利率，以 30%股票，40%長期債券利率與 30%現金的投資組合模擬出實際的$Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$與$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$之等值曲線圖。

在比較過第一個提撥率模型後，我們又針對以下幾個引入不同市場資訊的提撥率模型做出模擬：

$$\tilde{C}(t)=NC(t)+k_1(AL(t)-F(t))+k_2(e^{E_2}-e^{y(t)-J(t)]})$$

$$\tilde{C}(t)=NC(t)+k_1(AL(t)-F(t))+k_2(e^{E_4}-e^{I(t)})$$

$$\tilde{C}(t)=NC(t)+k_1(AL(t)-F(t))+k_2(e^{E_5}-e^{J(t)})$$

根據模擬所得到之上述三種模型的$Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$與$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$之等值曲線圖與圖(A)、圖(C)類似，所以我們嘗試另一種提撥率模型如下：

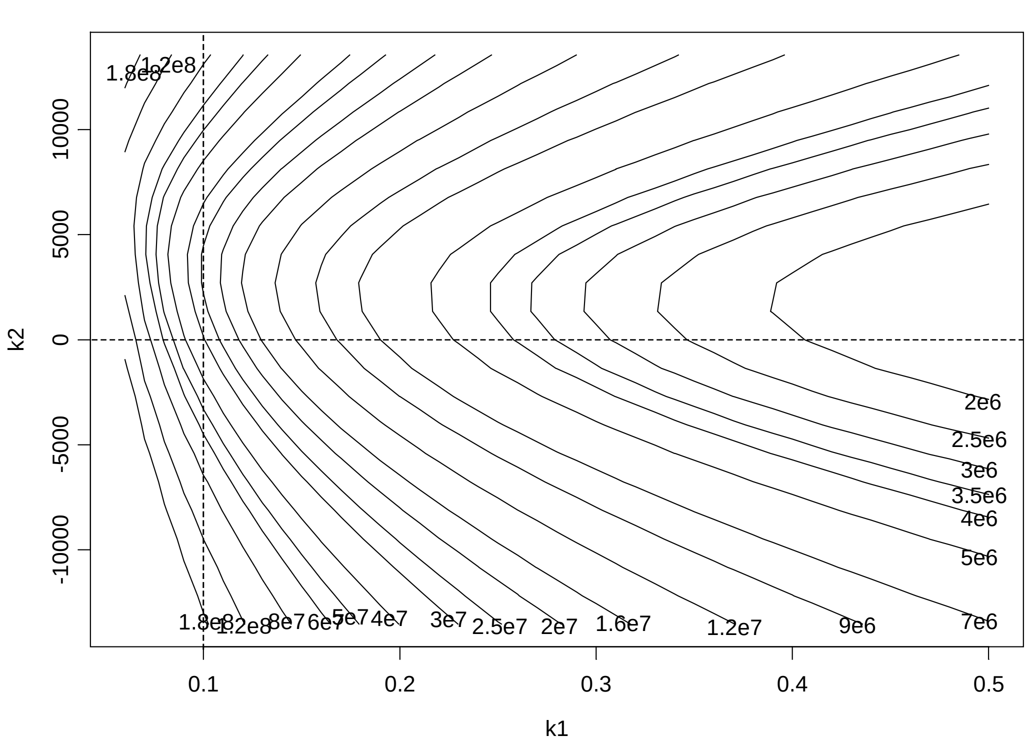
$$\tilde{C}(t)=NC(t)+k_1(AL(t)-F(t))+k_2(e^{E_3}-e^{y(t)})$$

此模型即以市場之無風險利率調整每期之退休金提撥率，在圖(B)與圖(D)中我們描繪出在給定 30%股票，40%長期債券利率與 30%現金的投資組合下之$Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$與$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$的等值曲線圖。

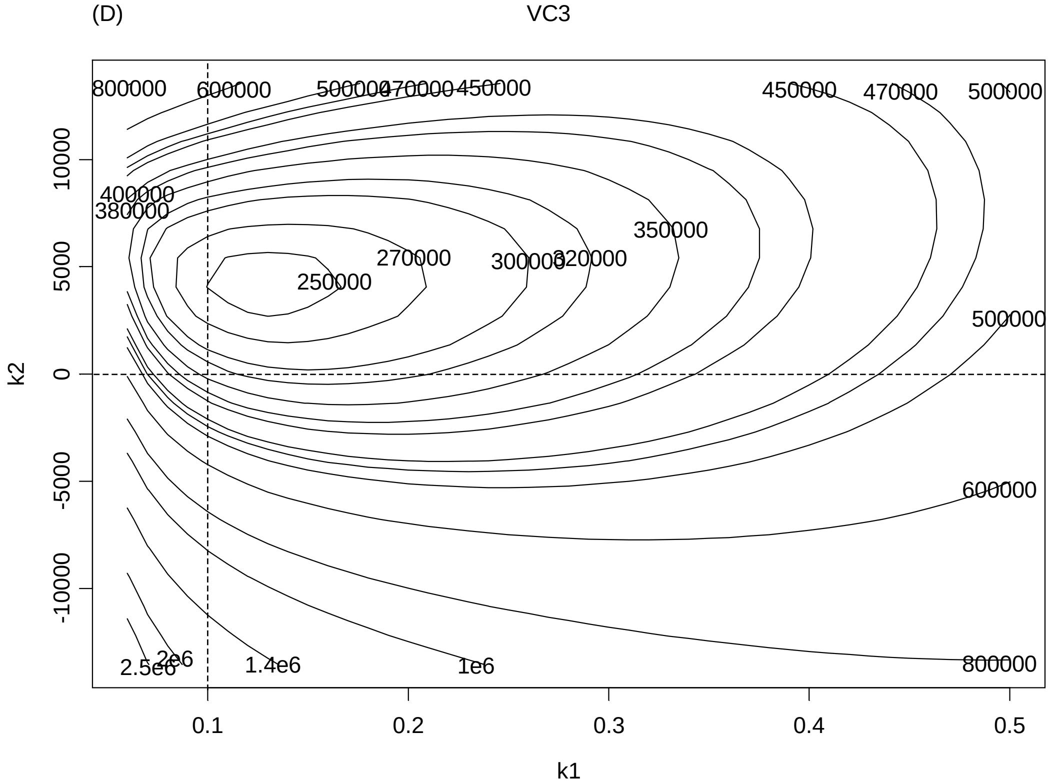
我們發現當k_1=0.1 時，我們所使用的提撥率模型可以使$Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$下降約 16.67%（從三千萬到兩千五百萬），雖然幅度沒有第一個模型來的大，但是卻能同時使$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$下降約 26.47%（從三十四萬到不到二十五萬）；若k_1=0.05，即攤提期間為 20 年時，更可降低$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$近 33.33%（從四十五萬到三十萬），而此時$Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$也可從原來的八千萬降低至六千萬，減少變異約 25%。

與第一個模型比較，使用k_2的資訊在這個模型下較可同時降低基金水準與提撥率之變異風險，因此，此模型為較適合之模型。

(B)



(D)



圖(B)與圖(D)：藉由市場之無風險利率，以 30%股票，40%長期債券利率與 30%

現金的投資組合模擬出實際$Var\left[\frac{F(t)}{W(t)}\right]$與$Var\left[\frac{C(t)}{W(t)}\right]$之等值曲線圖。

6. 結論

本篇文章中，我們嘗試了在退休金基金提撥率中加入了不同的市場資訊，如市場之無風險利率、薪資成長率、通貨膨脹率等，希望能夠利用市場之總體經濟所提供的訊息，降低退休金基金水準大小與提撥率的變異，使得在退休金能在永續經營下穩健成長。

本文採用隨機模擬的方法進行研究，因此不論是在資產或是負債面皆能採用較符合實際情境的精算假設，根據研究的結果我們發現，當使用某些市場資訊如市場之無風險利率時，確實可以有效的同時降低提撥率和基金大小之變異。

參考文獻

1. W.H. Aitken. A Problem-Solving Approach to Pension Fund and Valuation, Second Education. ACTEX Publications, 1996.
2. A. R. Bacinello. A stochastic simulation procedure for pension schemes. Insurance：Mathematics and Economics, (7)：153-161, 1988.
3. L. Balzer and S. Benjamin. Dynamic response of insurance system with delayed profit/loss sharing feedback to isolated unpredicted claims. Journal of Institute of Actuaries, (107)：513-528, 1998.
4. F. Black and R. Jones. Simplifying portfolio insurance for corporate pension plans. Journal of Portfolio Management,(Summer)：33-37, 1987.
5. A.J.G. Cairns. Pension funding in a stochastic environment：the role of objectives in selecting an asset location strategy. Proceeding of the 5th AFIR International Symposium, Brussels, (1)：429-453, 1995.
6. A.J.G Cairns. And G. Parker. Stochastic pension fund modeling. Insurance：Mathematics and Economics,1998.
7. D. Dufresne. Stability of pension systems when rate of return are random. Insurance：Mathematics and Economics, (8)：71-76,1989a.
8. A.C.L. Dyson and C.J. Exley. Pension fund asset valuation and investment. British Actuarial Journal, (1)：471-540, 1995.
9. S. Haberman and L. Y. Dynamic approach to pension funding. Insurance：Mathematics and Economics, (15)：151-162, 1994.
10. P.P. Huber. A review of wilkieis stochastic asset model. British Actuarial Journal, 3 (I)：181-210,1997.
11. E. Trussant J-F. Boulier and D. Florens. A dynamic model for pension funds management, Proceeding of 5th International AFIR Colloquium, (1)：361-384,1995.

12. S. Michel J-F. Boulier and V. Wisnia. Optimizing investment and contribution policies of a defined pension fund. Proceedings of 6th International AFIR Colloquium, (1):593-607,1996.
13. A. Keel and H. H Muller. Efficient portfolios in the asset liability context. Astin Bulletin,25 (1):33-48,1995.
14. D. H. Loades. Assessing the security of pension fund valuation bases using a stochastic investment model. Transaction of 23th international Congress Actuaries, (2):137-154,1992.
15. J. C. Hickman N. L. Bower and C. J. Nesbitt. Introduction to the dynamics of pension funding.
16. J. C. Hickman N. L. Bower , J. R. and C. J. Nesbitt. The dynamocs of pension funding:Contribution theory. Transactions of the Society of Actuaries, (31):93-136,1979.
17. J. C. Hickman N. L. Bower , J. R. and C. J. Nesbitt. Notes on the dynamics of pension funding. Insurance:Mathematics and Economics, (1):261-270,1982.
18. T. O'Brien. A stochastic approach to pension funding. Insurance: Mathematics and Economics, (5):141-146,1986.
19. T. O'Brien. Atwo-parameter family of pension contribution functions and stochastic optimization. Insurance:Mathematics and Economics, (6):129-134,1987.
20. J. Randall and S. Satchell. An analysis of the hedging approach to modelling pension funding liabilities:Part 1. Journal of Pension Management, 4 (2):183-198,1998.
21. A. F. Shapiro. The parameters of a multiple criteria model of actuarial assumptions for pension plan valuation. Insurance: Marhematics and Economics, (9):197-206,1990.
22. A.J.G. Carins A.J. Corvesor D.O. C.J. Exley I.S. Johnson J.G. Spain S.J. Head, D.R. Adkins and A.J. Wise. Pension fund valuations and market values. Presented to the Institute of Actuaries, October,1999.
23. A.D. Wilkie. More on a stochastic asset model for actuaries use. British Actuarial Journal, (1):777-964,1995.